

Un reloj de dos colores

Pedro Fernando Morales Almazán
Pedro_Morales@Baylor.edu

April 7, 2011

Problema:

Se considera un reloj con sus 12 números en torno a una circunferencia: 1, 2, ..., 12. Se pintan de azul o rojo cada uno de los 12 números de modo que haya seis pintados de azul y seis de rojo. El problema consiste en demostrar, que, independientemente del orden en que se hayan pintado, siempre existirá una posible recta que divida al reloj por la mitad, dejando en cada lado seis números, tres pintados de rojo y tres pintados de azul.

Solución

Sea X una coloración de los números $1, \dots, 12$ que satisfaga las condiciones del problema. Denótese por c_i el color del número i , donde $c_i = 1$ representa azul y $c_i = 0$ denota rojo. Sean $U_1(X) = \sum_{i=1}^6 c_i$ y $U_2(X) = 6 - U_1(X)$ cantidad de números azules en la parte $I = \{1, \dots, 6\}$ y la parte $II = \{7, \dots, 12\}$ respectivamente.

Sea $\sigma : \{1, \dots, 12\} \rightarrow \{1, \dots, 12\}$ dada por $\sigma(i) = i + 1$ para $1 \leq i < 12$ y $\sigma(12) = 1$. Considérese la acción de σ sobre X como $\sigma c_i = c_{\sigma(i)}$. De forma similar, defínase inductivamente $\sigma^k X = \sigma \sigma^{k-1} X$. Nótese que $\sigma^6 X$ intercambia las coloraciones en las partes I y II definidas por X .

Entonces, el problema se reduce a encontrar k , $0 \leq k < 12$ de tal manera que $U_1(\sigma^k X) = 3$, pues de esta manera la recta que divide k y $k+1$ proporciona el resultado deseado, en donde para $k = 0$ se toma la recta que divide a 12 y 1.

Dado que $U_1(\sigma X) = \sum_{i=2}^7 c_i = U_1(X) + c_7 - c_1$, se tiene que $|U_1(X) - U_1(\sigma X)| \leq 1$, y en general $|U_1(\sigma^k X) - U_1(\sigma^{k+1} X)| \leq 1$.

Si $U_1(X) = 3$, el resultado es inmediato. Supóngase ahora que $U_1(X) \neq 3$. Sin pérdida de generalidad, sea $a = U_1(X) < 3$. Por lo tanto $b = U_2(X) > 3$ y $U_1(\sigma^6 X) = b > 3$ y $U_2(\sigma^6 X) = a < 3$. Dado que U_1 tiene a lo más diferencia unitaria entre las acciones de potencias consecutivas de σ , y $a = U_1(\sigma^0 X) < 3 < U_1(\sigma^6 X) = b$, entonces existe $0 < k < 6$ de tal manera que $U_1(\sigma^k X) = 3$, lo cual da una recta que divida al reloj en la forma requerida.