Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ciencias

DISTRIBUCIÓN
DE RAÍCES DE POLINOMIOS

Pedro Fernando Morales Almazán

Asesorado por el Lic. José Rodrigo Vásquez Bianchi

Guatemala, octubre de 2006

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DISTRIBUCIÓN
DE RAÍCES DE POLINOMIOS

TRABAJO DE GRADUACIÓN
PRESENTADO A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA
FACULTAD DE INGENIERÍA
POR

PEDRO FERNANDO MORALES ALMAZÁN
ASESORADO POR EL LIC. JOSÉ RODRIGO VÁSQUEZ BIANCHI

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA APLICADA

GUATEMALA, OCTUBRE DE 2006

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA

NÓMINA DE JUNTA DIRECTIVA

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
VOCAL I	Inga. Glenda Patricia García Soria
VOCAL II	Lic. Amahán Sánchez Álvarez
VOCAL III	Ing Julio David Galicia Celada
VOCAL IV	Br. Kenneth Issur Estrada Ruiz
VOCAL V	Br. Elisa Yazminda Vides Leiva
SECRETARIA	Inga. Marcia Ivonne Véliz Vargas

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
EXAMINADOR	Lic. Ángel Augusto Arévalo Aguirre
EXAMINADOR	Lic. Sergio Augusto Solórzano Espinoza
EXAMINADOR	Lic. William Adolfo Polanco Anzueto
SECRETARIA	Inga. Marcia Ivonne Véliz Vargas

HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR

Cumpliendo con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

Distribución de Raíces de Polinomios,

tema que me fuera asignado por la Coordinación de la Carrera de Licenciatura en Matemática Aplicada, el 19 de junio de 2006.

Pedro Fernando Morales Almazán

Guatemala, 11 de octubre del 2006.

Ingeniero
José Alberto Boy Piedrasanta
Director Escuela de Ciencias
Facultad de Ingeniería, USAC
Presente

Señor director:

Por este medio me dirijo a usted para informarle que apruebo el trabajo de graduación titulado **"Distribución de Raices de Polinomios"** del estudiante **Pedro Fernando Morales Almazán** con número de carné 200312685, en mi calidad de asesor de dicho trabajo, ya que el mismo cumple con el rigor matemático adecuado, así como de una buena redacción clara y concisa, indispensable en los trabajos de matemática.

Agradeciendo su atención, me suscribo muy atentamente,

Lic. José Rodrigo Vásquez Bianchi

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERIA

Ref. LMA 90-2006.
Guatemala, 18 de octubre de 2006.

Ing. José Alberto Boy Piedrasanta.
Director de Escuela de Ciencias.
Facultad de Ingeniería.
Presente.

Ingeniero Boy Piedrasanta:

Al saludarle atentamente, me permito informarle que he realizado las revisiones pertinentes al trabajo de graduación titulado **"Distribución de raíces de polinomios",** presentado por el estudiante de Licenciatura en Matemática Aplicada, *Pedro Fernando Morales Almazán,* quien se identifica con carné número 2003-12685

Considerando que dicho trabajo cumple con los requisitos establecidos legalmente, con los objetivos de la Licenciatura en Matemática Aplicada y con los propósitos del mismo, me permito darle mi aprobación como revisora del estudio.

Atentamente,

"Id y Enseñad a Todos"

Licda. Mayra Virginia Castillo Montes
Coordinadora de Licenciatura en Matemática Aplicada

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
LICENCIATURA EN MATEMATICA APLICADA
COORDINADOR GENERAL
ESCUELA DE CIENCIAS - FACULTAD DE INGENIERIA

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE CIENCIAS

"30 Aniversario"
Fundación de la Escuela de Ciencias
1976-2006

El Director de la Escuela de Ciencias de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, después de conocer el dictamen del asesor, con el visto bueno del Coordinador de la Licenciatura en Matemática Aplicada al trabajo de graduación del estudiante ***PEDRO FERNANDO MORALES ALMAZÁN***, titulado "DISTRIBUCIÓN DE RAÍCES DE POLINOMIOS", procede a la autorización del mismo.

Ing. José Alberto Boy Piedrasanta
Director Escuela de Ciencias

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
Escuela de Ciencias
DIRECCION
FACULTAD DE INGENIERIA

Guatemala, 25 de octubre de 2006

JABP/sovs

Universidad de San Carlos
de Guatemala

Facultad de Ingeniería
Decanato

Ref. DTG.418.2006

El Decano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Director de la Escuela de Ciencias, al trabajo de graduación titulado: **DISTRIBUCIÓN DE RAÍCES DE POLINOMIOS,** presentado por el estudiante universitario **Pedro Fernando Morales Almazán,** procede a la autorización para la impresión del mismo.

IMPRÍMASE.

DECANO
FACULTAD DE INGENIERIA

Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
DECANO

Guatemala, Octubre 24 de 2006

/gdech

Todo por ti, Carolingia Mía
Dr. Carlos Martínez Durán
2006: Centenario de su Nacimiento

AGRADECIMIENTOS A:

Dios	Por haberme ayudado a culminar esta etapa de mi vida.
Mi Mamá	Por haberme dado la vida y haberme apoyado siempre en todo lo que he hecho.
Mi familia	Por ser tan unida y ayudarme siempre.
Mis catedráticos	Por la paciencia y dedicación que mostraron al enseñarnos.
Mi asesor	Por la orientación y consejo que me brindó para realizar este trabajo.
Licda. Mayra Castillo	Por el apoyo y motivación que siempre nos ha brindado, en todos los proyectos que realizamos.
Mis amigos	Por haber compartido tantos momentos agradables.
Mis compañeros	Por compartir una misma pasión y mostrar que la matemática une a las personas.
El Prof. Denis Ardón	Porque sin él, posiblemente no hubiera estudiado matemática.
La Universidad de San Carlos	Por darme la oportunidad de ser parte de esta casa de estudios.

A mi Familia

"Vivimos en el mundo cuando amamos. Sólo una vida vivida para los demás merece la pena ser vivida."

Albert Einstein

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES **III**
LISTA DE SÍMBOLOS **V**
RESUMEN **VII**
OBJETIVOS **IX**
INTRODUCCIÓN **XI**

1. DISTRIBUCIÓN DE RAÍCES SOBRE EL PLANO COMPLEJO **1**
1.1. Distribución sobre una recta 1
1.2. Distribución sobre una circunferencia 5
1.3. Distribución sobre una cónica cualquiera 7
2. POLINOMIOS CON RAÍCES REALES **13**
2.1. Preliminares 13
2.2. Propiedades 15
2.3. Análisis de $\mathfrak{R}_2$ 16
2.4. Análisis de $\mathfrak{R}_3$ 18
3. POLINOMIOS DE GRADO n **23**
3.1. El criterio de Sturm 23
3.2. Un polinomio desde el punto de vista del álgebra lineal 26
4. TRANSFORMACIONES DE $\mathfrak{R}_n$ EN SÍ MISMO **33**
4.1. Sucesiones en $\mathfrak{R}_2$ y $\mathfrak{R}_3$ 34
4.1.1. Polinomios de segundo grado 34
4.1.2. Polinomios de tercer grado 35
4.2. Caracterización de las sucesiones 39
4.3. Algunas sucesiones particulares 42
4.4. Propiedades generales de las sucesiones 45
4.4.1. Signo de los términos de la sucesión 45

4.4.2. Varianza de las raíces 45
5. APLICACIONES 47
5.1. Circuitos LRC 47
5.2. Funciones de transferencia 49

CONCLUSIONES 53
RECOMENDACIONES 55
BIBLIOGRAFÍA 57

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

FIGURAS

1.	Traslación al origen	2
2.	Rotación al eje real	3
3.	Traslación de cincunferencia	6
4.	$\mathfrak{R}_2$	17
5.	$\mathfrak{R}_3$ Vista superior	21
6.	$\mathfrak{R}_3$ Vista Inferior	21
7.	Circuito LRC	48

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
$\square$	Fin de la demostración
$\varnothing$	Conjunto vacío
$\mathbb{C}$	Campo de los complejos
$\mathbb{R}$	Campo de los reales
$\in$	Pertenece
$\boldsymbol{\bar{a}}$	Conjugado complejo de a
i	Raiz cuadrada de -1
$\lvert\lvert \boldsymbol{a} \rvert\rvert$	Norma de a
$\boldsymbol{e}$	Número de Euler
$\boldsymbol{\Re(a)}$	Parte real de a
$\boldsymbol{\Im(a)}$	Parte imaginaria de a
$\mathbb{R}^{\boldsymbol{(n)}}[\boldsymbol{x}]$	Conjunto de polinomios de grado no mayor a n con coeficientes reales
$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$	Producto cartesiano de $\mathbb{R}$ consigo mismo n veces
$\boldsymbol{n!}$	El factorial de n
$\boldsymbol{p'(x)}$	Primera derivada de $p(x)$
$\boldsymbol{\binom{n}{k}}$	Combinaciones de n en k
$\boldsymbol{p'(x)}$	Primera derivada de $p(x)$
$\boldsymbol{detA}$	Determinante de A

RESUMEN

El análisis de los polinomios ha sido uno de los temas de estudio más antiguos del ser humano, y en particular, el análisis de los polinomios que poseen todas sus raíces reales.

La naturaleza de las raíces de polinomios tiene una relación directa con varias aplicaciones de estos en diversos campos de la ciencia, como lo son los circuitos eléctricos, amplificadores, filtros, sistemas mecánicos, engranajes, motores y una gran variedad más de sistemas de control, ya que dichos sistemas pueden modelarse a través de sistemas de ecuaciones diferenciales, cuando se estudian en el dominio del tiempo, o bien, por medio de transformaciones, como la *Transformada de Laplace* en el dominio de la frecuencia, y como resultado de dicha modelación, se obtienen polinomios, en donde las raíces determinan el comportamiento del sistema.

OBJETIVOS

General

- Investigar propiedades características de los polinomios de raíces reales.

Específicos

1. Investigar formas de obtener polinomios con raíces reales a partir de transformaciones lineales.
2. Poder determinar qué distribución en el plano complejo, tienen las raíces de un polinomio dado.
3. Enunciar y demostrar la caracterización de las sucesiones de números reales, que transforman polinomios con raíces reales en otros con las mismas características.
4. Construir polinomios con todas sus raíces sobre una curva cónica en el plano complejo.

INTRODUCCIÓN

La determinación de las raíces de los polinomios, o la resolución de ecuaciones algebraícas, está entre los problemas más viejos de la matemática. Su estudio se remonta a la época de los babilonios (2000 A.C.), los cuales ya eran capaces de resolver ecuaciones de segundo grado por medio de radicales. En 300 A.C., Euclides da interpretaciones geométricas a las ecuaciones algebraícas, logrando así resolver ecuaciones cuadráticas por medio de construcciones geométricas. Luego, los árabes (1000 D.C.) logran reducir las ecuaciones del tipo $x^{2p} + ax^p = b$ a ecuaciones cuadráticas.

A partir del estudio del álgebra, la investigación sobre polinomios y sus raíces cobró auge. Se investigaron más las propiedades de los polinomios como estructura, encontrándose soluciones por radicales para ecuaciones de grados dos, tres y cuatro; sin embargo, las fórmulas para polinomios de quinto grado fueron esquivas para los investigadores durante un tiempo prolongado. En 1824, Niels Henrik Abel demostró el resultado que no puede haber fórmulas generales para los polinomios de grado cinco o mayores en términos de sus coeficientes. Este resultado marcó el comienzo de la teoría de Galois que se encarga de un estudio detallado de las relaciones entre las raíces de los polinomios.

La forma de determinar si un polinomio tiene raíces reales o no ha sido tema de estudio a través de la historia. Existen varios métodos para poder comprobar si un polinomio dado posee raíces reales, si son positivas o negativas, si se encuentran en un intervalo dado, o si están acotadas por un número dado, sin embargo, fue el matemático húngaro George Pólya quien en un artículo sugirió una forma de trasformar polinomios con todas sus raíces reales en otro con las mismas características.

1. DISTRIBUCIÓN DE RAÍCES SOBRE EL PLANO COMPLEJO

1.1. Distribución sobre una recta

Si f y g son funciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, podemos considerar que f actúa sobre g por composición: $h = f(g)$, donde h es la función de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ definida por $h = g \circ f$, es decir, h es la función que se obtiene de g al hacer el *cambio de variable* f. Vamos a considerar el plano complejo $\mathbb{C}$ y los movimientos del plano $M = \{T | T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\}$ donde T es una traslación, rotación, homotecia, una reflexión axial o una inversión sobre un círculo. Tales transformaciones las extenderemos al álgebra $\mathbb{C}[z]$ de polinomios al aplicarlas como *cambios de variable*: si $T \in M$, supondremos que T también actúa sobre $\mathbb{C}[z]$ definiendo $T : \mathbb{C}[z] \to \mathbb{C}[z]$ de la manera siguiente:

$$T : p(z) \mapsto q(z) = T(p)(z) = p(T(z)).$$

Considérese un polinomio mónico

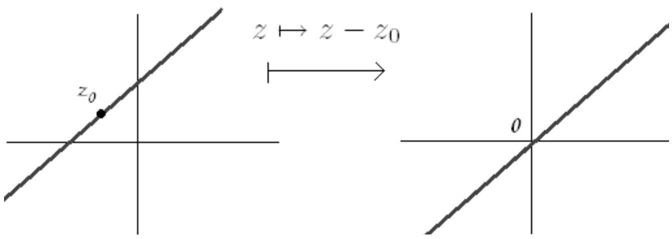
$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0. \tag{1.1}$$

Por el teorema del factor,

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) \tag{1.2}$$

con $z_i \in \mathbb{C}$.

Figura 1: Traslación al origen



Si las raíces de $p(z)$ están sobre la recta

$$L = \{z | z = at + z_0\} \tag{1.3}$$

con $a = e^{\theta i}$ y $t \in \mathbb{R}$, entonces $z_k = at_k + z_0$, $t_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, ..., n$. Al realizar la traslación (1)

$$z \mapsto z - z_0 \tag{1.4}$$

$p(z)$ se transforma en $q(z) = p(z - z_0)$, un polinomio cuyas raíces at_1, at_2, $\ldots$, at_n están sobre la recta

$$L' = \{z | z = at\} \tag{1.5}$$

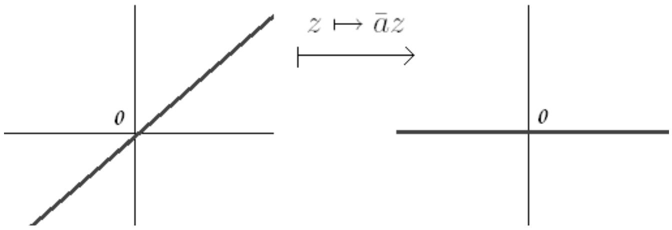
Si se realiza ahora la rotación (2)

$$z \mapsto \bar{a}z \tag{1.6}$$

$q(z)$ se transforma en $r(z) = q(\bar{a}z)$, un polinomio cuyas raíces t_1, t_2, $\ldots$, t_n son todas reales.

Concluimos que, dado un polinomio $p(z)$ cuyas raíces están sobre una recta, existe un movimiento rígido del plano que transforma a $p(z)$ en un polinomio con todas sus raíces reales. Dicha transformación siempre se puede descomponer como producto de traslaciones y rotaciones.

Figura 2: Rotación al eje real



$$p(z) \mapsto q(z) = \bar{a}^n p(az + z_0) \tag{1.7}$$

con z_0 y a definidos como en (1.3).

Por ejemplo, considérese el polinomio

$$\begin{aligned} p(z) &= (z - (2+i))\,(z - (3+2i))\,(z - (4+3i)) \\ &= z^3 - (9+6i)\,z^2 + (15+34i)\,z + 5 - 40i \end{aligned}$$

Las raíces de $p(z)$ son: $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 + 2i$, $z_3 = 4 + 3i$, y están sobre la recta

$$L = \left\{ z | z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) t + 1 \right\}.$$

Por lo tanto, el polinomio

$$\begin{aligned}
q(z) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^3 p\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)z + 1\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^3 (\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)z + 1\right)^3 \\
&- (9+6i)\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)z + 1\right)^2 \\
&+ (15+34i)\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)z + 1\right) + 5 - 40i) \\
&= z^3 - 6\sqrt{2}z^2 + 22z - 12\sqrt{2}
\end{aligned}$$

tiene sus raíces reales

$$r_1 = (1+i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2},$$

$$r_2 = (2+2i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2},$$

$$r_3 = (3+3i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 3\sqrt{2}.$$

En efecto:

$$\left(z - \sqrt{2}\right)\left(z - 2\sqrt{2}\right)\left(z - 3\sqrt{2}\right) = z^3 - 6\sqrt{2}z^2 + 22z - 12\sqrt{2}.$$

1.2. Distribución sobre una circunferencia

Considérese nuevamente el polimonio mónico $p(z)$ definido en (1.1). Supongamos que $p(z)$ tiene todas sus raíces sobre la circunferencia

$$C = \{z | \, \|z - a\| = r\} \tag{1.8}$$

centrada en $a \in \mathbb{C}$ y con radio r. Por el teorema del factor,

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Donde

$$z_k = a + re^{i\theta_k}$$

con $\theta_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, ..., n$.

La transformación

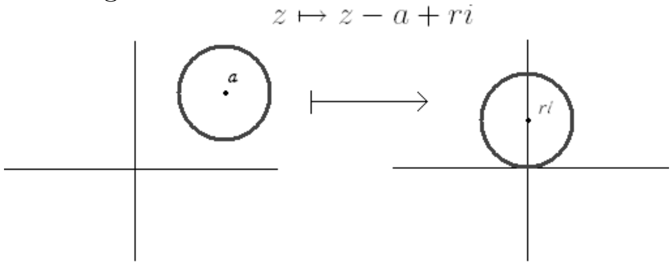
$$w = \frac{1 + zi}{2i + 2z} \tag{1.9}$$

mapea la circunferencia unidad con centro en el origen en la recta real, y su inversa es

$$z = \frac{2wi - 1}{i - 2w} \tag{1.10}$$

Así que

Figura 3: Traslación de circunferencia



$$q(z) = (i - 2z)^n p\left(r\frac{2zi - 1}{i - 2z} + a\right) \tag{1.11}$$

tiene sus raíces sobre reales en

$$r_k = \frac{1 + e^{\theta_k i} i}{2i + 2e^{\theta_k i}} \tag{1.12}$$

Por ejemplo, considérese el polinomio

$$p(z) = (z - (1 + i + 3e^{\pi/4}))(z - (1 + i + 3e^{3\pi/4}))(z - (1 + i + 3e^{-\pi/4})) \tag{1.13}$$

$$p(z) = (-216(1+\sqrt{2}+i))(z^3 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) z^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{4}\right) z + \left(\frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{8}\right)) \tag{1.14}$$

el cual tiene sus raíces sobre la circunferencia

$$C = \{z | \, \|z - (1 + i)\| = 3\} \tag{1.15}$$

por lo tanto el polinomio

$$q(z) = (i - 2z)^3 p\left(3\frac{2zi - 1}{i - 2z} + 1 + i\right) \tag{1.16}$$

tiene sus raíces en

$$r_1 = \frac{1 + e^{\pi/4i} i}{2i + 2e^{\pi/4i}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{1.17}$$

$$r_2 = \frac{1 + e^{3\pi/4i} i}{2i + 2e^{3\pi/4i}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{1.18}$$

$$r_3 = \frac{1 + e^{-\pi/4i} i}{2i + 2e^{-\pi/4i}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{1.19}$$

en efecto:

$$\begin{aligned} &\left(z - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(z - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(z - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \\ &\qquad z^3 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) z^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{4}\right) z + \left(\frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{8}\right) \end{aligned} \tag{1.20}$$

1.3. Distribución Sobre una Cónica Cualquiera

En esta sección haremos uso de un resultado geométrico que nos permitirá encontrar una transformación puntual que mapee a una cónica dada en otra cónica deseada.

Sea T un mapeo de $\mathbb{C}$ en sí mismo. A T lo llamaremos *transformación trilineal* si

$$T(x, y) \mapsto \left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{\delta x + \epsilon y + \zeta}, \frac{\eta x + \theta y + \kappa}{\delta x + \epsilon y + \zeta}\right) \tag{1.21}$$

Esta transformación puede representarse mediante la matriz de sus coeficientes

$$M_T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \eta & \theta & \kappa \\ \delta & \epsilon & \zeta \end{pmatrix} \tag{1.22}$$

Pasaremos ahora a un resultado que nos será de mucha utilidad

1.1 Teorema. Sean T_1 y T_2 dos transformaciones trilineales con matrices de coeficientes M_{T_1} y M_{T_2} respectivamente, y sea $T_3 = T_2 \circ T_1$ la composición de T_1 con T_2. Entonces T_3 es una transformación trilineal y su matriz de coeficientes está dada por

$$M_{T_3} = M_{T_2} M_{T_1} \tag{1.23}$$

Demostración. Sean

$$M_{T_1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \eta_1 & \theta_1 & \kappa_1 \\ \delta_1 & \epsilon_1 & \zeta_1 \end{pmatrix} \qquad M_{T_2} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \eta_2 & \theta_2 & \kappa_2 \\ \delta_2 & \epsilon_2 & \zeta_2 \end{pmatrix} \tag{1.24}$$

por lo tanto se tiene que

$$T_1(x, y) = \left(\frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\delta_1 x + \epsilon_1 y + \zeta_1}, \frac{\eta_1 x + \theta_1 y + \kappa_1}{\delta_1 x + \epsilon_1 y + \zeta_1} \right) \tag{1.25}$$

y

$$T_2(x, y) = \left(\frac{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}{\delta_2 x + \epsilon_2 y + \zeta_2}, \frac{\eta_2 x + \theta_2 y + \kappa_2}{\delta_2 x + \epsilon_2 y + \zeta_2} \right) \tag{1.26}$$

asi que tenemos que T_3 es

$$\left(\frac{\alpha_2\left(\frac{\alpha_1x+\beta_1+\gamma_1}{\delta_1x+\epsilon_1y+\zeta_1}\right)+\beta_2\left(\frac{\eta_1x+\theta_1y+\kappa_1}{\delta_1x+\epsilon_1y+\zeta_1}\right)+\gamma_2}{\delta_2\left(\frac{\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1}{\delta_1x+\epsilon_1y+\zeta_1}\right)+\epsilon_2\left(\frac{\eta_1x+\theta_1y+\kappa_1}{\delta_1x+\epsilon_1y+\zeta_1}\right)+\zeta_2},\frac{\eta_2\left(\frac{\alpha_1x+\beta_1+\gamma_1}{\delta_1x+\epsilon_1y+\zeta_1}\right)+\theta_2\left(\frac{\eta_1x+\theta_1y+\kappa_1}{\delta_1x+\epsilon_1y+\zeta_1}\right)+\kappa_2}{\delta_2\left(\frac{\alpha_1x+\beta_1+\gamma_1}{\delta_1x+\epsilon_1y+\zeta_1}\right)+\epsilon_2\left(\frac{\eta_1x+\theta_1y+\kappa_1}{\delta_1x+\epsilon_1y+\zeta_1}\right)+\zeta_2}\right) \tag{1.27}$$

lo cual, reordenado y agrupando queda

$$\Re(T_3)=\frac{(\alpha_2\alpha_1+\beta_2\eta_1+\gamma_2\delta_1)x+(\alpha_2\beta_1+\beta_2\theta_1+\gamma_2\epsilon_1)y+(\alpha_2\gamma_1+\beta_2\kappa_1+\gamma_2\zeta_1)}{(\delta_2\alpha_1+\epsilon_2\eta_1+\zeta_2\delta_1)x+(\delta_2\beta_1+\epsilon_2\theta_1+\zeta_2\epsilon_1)y+(\delta_2\gamma_1+\epsilon_2\kappa_1+\zeta_2\zeta_1)} \tag{1.28}$$

$$\Im(T_3)=\frac{(\eta_2\alpha_1+\theta_2\eta_1+\kappa_2\delta_1)x+(\eta_2\beta_1+\theta_2\theta_1+\kappa_2\epsilon_1)y+(\eta_2\gamma_1+\theta_2\kappa_1+\kappa_2\zeta_1)}{(\delta_2\alpha_1+\epsilon_2\eta_1+\zeta_2\delta_1)x+(\delta_2\beta_1+\epsilon_2\theta_1+\zeta_2\epsilon_1)y+(\delta_2\gamma_1+\epsilon_2\kappa_1+\zeta_2\zeta_1)} \tag{1.29}$$

por lo que la matriz de coeficientes de T_3 coincide con $M_{T_2}M_{T_1}$ $\square$

Ahora, recordemos que una cónica es la curva definida por una ecuación de la forma

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \tag{1.30}$$

Dicha curva puede ser, dependiendo de los coeficientes, una de las siguientes: *una elipse*, en particular *una circunferencia*, en particular *un punto* o *el vacío*; *una parábola*, en particular *un par de rectas paralelas*, en particular *dos rectas que coinciden*; *una hipérbola*, en particular *un par de rectas que se intersectan.*

Mediante homotecias, traslaciones y rotaciones del plano, (1.30) puede reducirse a la forma *canónica* en cada caso, como sigue:

Una elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1.31}$$

En particular, si en el caso anterior es $a = b = r$, una circunferencia (o, si $r = 0$, un punto):

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{1.32}$$

El vacío (si $r \neq 0$):

$$x^2 + y^2 = -r^2. \tag{1.33}$$

Una parábola:

$$x^2 = y. \tag{1.34}$$

Un par de rectas paralelas:

$$x^2 = r^2. \tag{1.35}$$

En particular, si $r = 0$, dos rectas que coinciden:

$$x^2 = 0. \tag{1.36}$$

Una hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1.37}$$

Un par de rectas que se intersectan:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \tag{1.38}$$

1.2 Teorema. Dadas dos cónicas cualesquiera C_1 y C_2, existe una proyectividad que transforma C_1 en C_2.

Demostración. Primero definiremos la transformación

$$M_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.39}$$

la cuál es su propia inversa, ya que $M_T^2 = I$, la matriz identidad.

Por lo tanto se tiene que

$$T(x, y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right) \tag{1.40}$$

Esta transformación es tal que transforma la hipérbole

$$H : (\sec\theta, \tan\theta) \tag{1.41}$$

en la circunferencia unidad

$$C : (\cos\theta, \sin\theta) \tag{1.42}$$

y a la parábola

$$P : (t, t^2) \tag{1.43}$$

en la hipérbole

$$\tilde{H} : (1/t, t) \tag{1.44}$$

Por la parte anterior tenemos entonces que cualquier elipse, parábola e hipérbole puede transformarse por medio de la composición de homotecias, rotaciones y traslaciones en una cónica en su forma canónica, y al componerla con la transformación T, en la circunferencia centrada en el origen de radio 1 y viceversa.

Así que por medio de composiciones de transformaciones se puede transformar una cónica en otra.

$\square$

Así, tenemos que para determinar si un polinomio tiene sus raíces distribuidas sobre una cónica, basta con comprobar si luego de una transformación adecuada, resulta un polinomio con todas sus raíces reales. Por esta razón en lo que sigue nos limitaremos al estudio de los polinomios con raíces reales.

2. POLINOMIOS CON RAÍCES REALES

2.1. Preliminares

2.1 Definición. Sea $\mathbb{R}^{(n)}[x]$ el conjunto de polinomios con coeficientes reales de grado no mayor que n. $\mathbb{R}^{(n)}[x]$ no es un espacio vectorial, pero $\bar{\mathbb{R}}^{(n)}[x] = \mathbb{R}^{(n)}[x] \cup \{0\}$ sí es un espacio vectorial con las operaciones ordinarias.

Si se tiene que $p\,(x) \in \bar{\mathbb{R}}^{(n)}[x]$, $p\,(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$, con $a_i \in \mathbb{R}$, la función

$$c : \bar{\mathbb{R}}^{(n)}[x] \to \mathbb{R}^{n+1} \tag{2.1}$$

definida por

$$c : p\,(x) \mapsto (a_n, ..., a_0) \tag{2.2}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Para simplificar, identifiquemos $\bar{\mathbb{R}}^{(n)}[x]$ con $\mathbb{R}^{n+1}$ e identifiquemos los elementos de $\bar{\mathbb{R}}^{(n)}[x]$ con los de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Definimos en $\bar{\mathbb{R}}^{(n)}[x]$ la relación de equivalencia siguiente:

$$p\,(x) \sim q\,(x) \tag{2.3}$$

si y solo si $p\,(x)$ y $q\,(x)$ son linealmente dependientes, es decir, si existen λ, $\mu \in \mathbb{R}$ no ambos nulos, tales que

$$\lambda p(x) + \mu q(x) = 0. \tag{2.4}$$

La clase de equivalencia de $p(x)$ es

$$\overline{p(x)} = \{\lambda p(x) \,|\, \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0\}. \tag{2.5}$$

En particular tenemos que, $\bar{0} = \{0\}$ y $p(x) \sim q(x)$ si y solo si $p(x)$ y $q(x)$ tienen exactamente las mismas raíces. Como representante canónico de $\overline{p(x)}$ tomamos el único polinomio mónico que pertenece a $\overline{p(x)}$ y lo designamos $\widehat{p(x)}$. Excepto por el hecho que $0 \notin \overline{p(x)}$, tenemos que $\overline{p(x)}$ es la recta en $\bar{\mathbb{R}}^{(n)}[x]$ que contiene a $p(x)$.

2.2 Definición. El conjunto de representantes canónicos de los polinomios de grado n es el hiperplano $\mathbb{R}_n[x]$ definido por la ecuación

$$a_n = 1. \tag{2.6}$$

Cada *recta* $\overline{p(x)}$ tal que $p(x)$ es de grado n, corta al hiperplano $\mathbb{R}_n[x]$ exactamente en un punto, el polinomio mónico $\widehat{p(x)}$. Las *rectas* $\overline{p(x)}$ tales que $p(x)$ es de grado menor que n, están en el hiperplano formado por los polinomios de grado menor que n, sin tomar en cuenta el polinomio nulo, el cual está definido por la ecuación

$$a_n = 0. \tag{2.7}$$

Tenemos pues, el espacio $\mathbb{R}^{n+1}$ y dos hiperplanos en él: $a_n = 1$ y $a_n = 0$. Uniendo estos dos hiperplanos obtenemos el espacio proyectivo P^n de la manera siguiente: cada recta $\overline{p(x)}$ que corta al hiperplano $a_n = 1$ (es decir, cada recta que no está contenida en el hiperplano $a_n = 0$) define un punto finito en P^n; cada recta $\overline{p(x)}$ que está contenida en el hiperplano$a_n = 0$ (es decir, cada recta que no corta al hiperplano $a_n = 0$) define un punto en el infinito en P^n. Para simplificar: el haz de rectas que pasan por el origen en $\mathbb{R}^{n+1}$ forman el conjunto de puntos del espacio proyectivo P^n.

2.3 Definición. $\mathfrak{R}_n$ es el conjunto de polinomios mónicos con coeficientes reales y raices reales, es decir, el subconjunto del hiperplano $\mathbb{R}_n[x]$ tal que sus elementos tienen todas sus raices reales.

2.2. Propiedades

Todo polinomio $p(x) \in \mathfrak{R}_n$ como en (2.1), tiene las siguientes propiedades

1. $p(x + c) \in \mathfrak{R}_n$, con $c \in \mathbb{R}$
2. $p(cx)/c^n \in \mathfrak{R}_n$, con $c \in \mathbb{R}$ con $c \neq 0$
3. Si 0 es una raiz de $p(x)$ de multiplicidad k, entonces $x^{n-k}p(\frac{1}{x})/a_k \in \mathfrak{R}_{n-k}$
4. $p'(x)/n \in \mathfrak{R}_{n-1}$ para $n > 0$.

Demostración. I) Si r es una raíz de $p(x)$, entonces se tendrá que $r - c$ es raíz de $p(x + c)$, por lo que todas las raices de $p(x)$ son transformadas unívocamente a raices de $p(x + c)$, por lo que $p(x + c) \in \mathfrak{R}_n$

II) Si r es una raíz de $p(x)$, entonces se tendrá que r/c es raíz de $p(cx)$, por lo que todas las raices de $p(x)$ son transformadas unívocamente a raices de $p(cx)$ y si son raices de $p(cx)$ también lo serán de $p(cx)/c^n$, por lo que $p(cx)/c^n \in \mathfrak{R}_n$

III) Si r es una raíz de $p(x)/x^k$, entonces se tendrá que $1/r$ es raíz de $p(1/x)/x^k$, por lo que todas las raices de $p(x)/x^k$ son transformadas unívocamente a raices de $p(1/x)/x^k$ y si son raices de $p(1/x)/x^k$ también lo serán de $x^{n-k}p(1/x)/a_k$, por lo que $x^{n-k}p(x)/a_0 \in \mathfrak{R}_{n-k}$

IV) Si $p(x) \in \mathfrak{R}_n$ entonces tiene todas sus raices reales y por lo tanto se tiene que, por el teorema del valor medio, entre dos raices consecutivas hay un real para el cual $p'(x)$ es cero, así que $p'(x)$ tiene todas sus raices reales.

$\square$

Del último inciso se obtiene el siguiente corolario

2.1 Corolario. $(n-k)!p^{(k)}(x)/n! \in \mathfrak{R}_{n-k}$ para $n > 0$ y $0 \leq k \leq n$.

Otra forma de ver el teorema anterior es por medio del siguiente corolario

2.2 Corolario. Si $(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0) \in \mathfrak{R}_n$ entonces

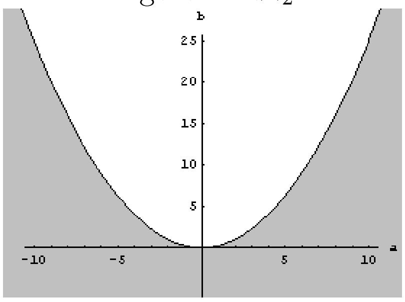
1. $(a_{n-1} + nc, \ldots, \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} a_k c^{k-i}, \ldots, \sum_{k=0}^{n} a_k c^k) \in \mathfrak{R}_n$
2. $(a_{n-1}/c, a_{n-2}/c^2, \ldots, a_0/c^n) \in \mathfrak{R}_n$ con $c \neq 0$
3. $(a_{k+1}/a_k, a_{k+2}/a_k, \ldots, 1/a_k) \in \mathfrak{R}_{n-k}$ con k la multiplicidad de la raiz 0 en $p(x)$
4. $((n-1)a_{n-1}/n, (n-2)a_{n-2}/n, \ldots, a_1/n) \in \mathfrak{R}_{n-1}$

2.3. Análisis de $\mathfrak{R}_2$

Un polinomio mónico de grado 2

$$p(x) = x^2 + ax + b \tag{2.8}$$

Figura 4: $\mathfrak{R}_2$



con coeficientes reales tiene sus raices reales, si y solo si su discriminante $D = a^2 - 4b \geq 0$, i.e.

$$a^2 \geq 4b \tag{2.9}$$

Por lo tanto, se tiene el siguiente

2.1 Teorema. Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, entonces $(a, b) \in \mathfrak{R}_2$ si y solo si $a^2 \geq 4b$

Se sigue que la región de $\mathbb{R}^2$ tal que se cumple (2.9) es isomorfa a $\mathfrak{R}_2 \subset \mathbb{R}_2[x]$.

Además, dentro de $\mathfrak{R}_2$ podemos definir un *producto* de la manera siguiente

2.4 Definición. Si $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}_2[x]$, sea

$$(a, b) \cdot (c, d) \equiv (s_{ac}\,|ac|, s_{bd}\,|bd|) \tag{2.10}$$

donde s_{xy}, con $x, y \in \mathbb{R}$ se define como

$$s_{xy} = \begin{cases} sign(x) & \text{si } xy \geq 0 \\ -1 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{2.11}$$

entonces tenemos el siguiente teorema

2.2 Teorema. Si $(a, b), (c, d) \in \mathfrak{R}_2$ entonces $(a, b) \cdot (c, d) \in \mathfrak{R}_2$

Demostración. Si $(a, b) \in \Re_2$, entonces

$$a^2 \geq 4b$$

y similarmente, si $(c, d) \in \Re_2$

$$c^2 \geq 4d$$

por lo tanto

$$(s_{ac}\, ac)^2 = a^2 c^2 \geq s_{bd}\, 16bd > s_{bd}\, 4bd$$

en donde la primer desigualdad se obtiene de la definición de s_{bd} y las propiedades de desigualdades, y de aqui se sigue el resultado deseado.

$\square$

2.3 Corolario. Si $(a, b) \in \Re_2$ entonces para $m \in \mathbb{Z}^+$, $m > 1$, se tiene que

$$(sign(a)\, a^m, sign(b)\, b^m) \in \Re_2 \tag{2.12}$$

2.4. Análisis de $\Re_3$

Para el análisis de $\Re_3$, vamos a mostrar una propiedad que caracteriza a los polinomios de tercer grado que tienen todas sus raíces reales por medio de sus coeficientes, esto por medio del siguiente teorema:

2.3 Teorema. Sea $p(x)$ un polinomio de tercer grado

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \tag{2.13}$$

entonces p tiene todas sus raíces reales si y solo si

$$a^2 \geq 3b$$

$$2(a^2 - 3b)^{3/2} \geq |9ab - 27c - 2a^3|$$

Demostración. Supongamos que $p(x)$ tiene sus tres raíces reales $r_1 \leq r_2 \leq r_3$. Entonces por el *Teorema del Valor medio*, entre r_1 y r_2, $p'(x)$ tiene una raíz, al igual que entre r_2 y r_3, así que

$$p'^2 + 2ax + b \tag{2.14}$$

tiene sus raíces reales, y como vimos en la sección anterior $\left(\frac{2a}{3}\right)^2 \geq 4b$, lo cual es equivalente a:

$$a^2 \geq 3b \tag{2.15}$$

además, como $p(x)$ tiene coeficiente principal positivo, se tiene que $p(x)$ es creciente desde $-\infty$ hasta el primer punto crítico, así como desde el segundo valor crítico hasta ∞, por lo tando para que todas las raíces de (2.4) sean reales se tiene que tener que su máximo local ubicado en la raíz más pequeña de $p'(x)$ sea positivo y que el mínimo local colocado en la raíz más grande de $p'(x)$ sea negativo, es decir, al valuar las raíces

$$x_1 = -\frac{a}{3} - \frac{\sqrt{b^2 - 3c}}{3} \tag{2.16}$$

$$x_2 = -\frac{a}{3} + \frac{\sqrt{b^2 - 3c}}{3} \tag{2.17}$$

de $p'(x)$ en $p(x)$ debe tener que

$$p(x_1) \geq 0 \tag{2.18}$$

$$p(x_2) \leq 0 \tag{2.19}$$

es decir que

$$2a^3 + 2(a^2 - 3b)^{3/2} - 9ab + 27c \geq 0 \tag{2.20}$$

$$2a^3 - 2(a^2 - 3b)^{3/2} - 9ab + 27c \leq 0 \tag{2.21}$$

o lo que es lo mismo,

$$2(a^2 - 3b)^{3/2} \geq |9ab - 27c - 2a^3| \tag{2.22}$$

con lo que se concluye la prueba $\square$

Esta superficie se muestra en las figuras 5 y 6.

Además, se tiene como corolario el siguiente resultado

2.4 Corolario. Si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, entonces $(a, b, c) \in \mathfrak{R}_3$ si y solo si

$$a^2 \geq 3b$$
$$2(a^2 - 3b)^{3/2} \geq |9ab - 27c - 2a^3|$$

Figura 5: $\mathfrak{R}_3$ Vista Superior

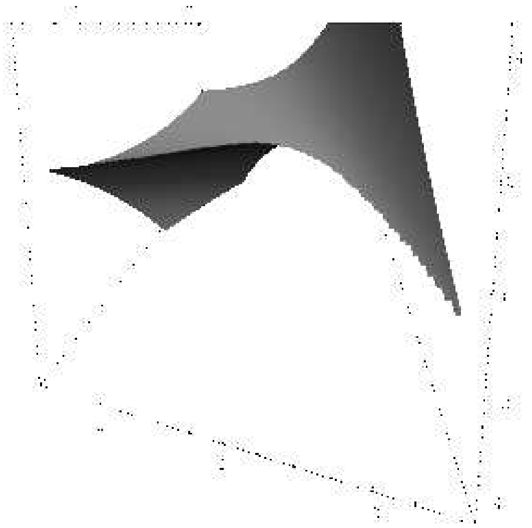
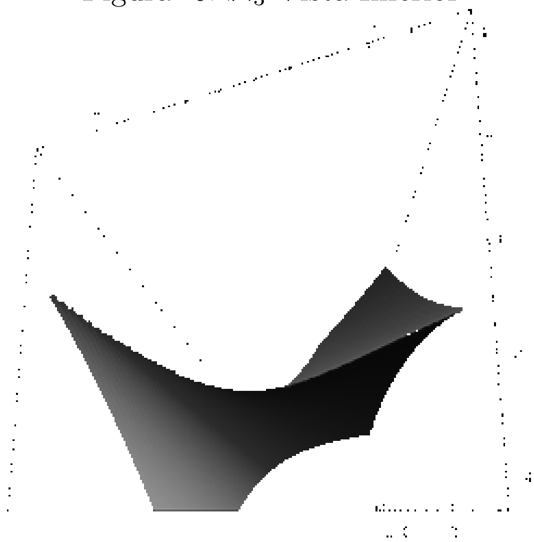


Figura 6: $\mathfrak{R}_3$ Vista Inferior



3. POLINOMIOS DE GRADO n

3.1. El Criterio de Sturm

Ahora veamos el caso general de un polinomio $p(x)$ de grado n con coeficientes reales. Para determinar si las raíces de $p(x)$ son todas reales, aplicamos el *Teorema de Sturm* para contar el número de raíces reales de $p(x)$, y si este número es n tendremos el resultado. El siguiente teorema nos da una acotación simple para las raíces de $p(x)$.

3.1 Teorema. Sea

$$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$$

con $a_i \in R$. Sea M es el máximo de los números 1 y $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$. Entonces se tiene que

$$p(s) > 0 \text{ para } s > M$$

$$(-1)^n p(s) > 0 \text{ para } s < -M$$

por lo que todas las raíces de $p(x)$ en R están en el intervalo $[-M, M]$.

3.2 Teorema (Sturm)**.** Comenzando con un polinomio dado $p(x)$, sean los polinomios $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\ldots$, $p_r(x)$ definidos como sigue:

$$\begin{aligned}
&p_1(x) = p'(x)\\
&p(x) = q_1(x)p_1(x) - p_2(x)\\
&p_1(x) = q_2(x)p_2(x) - p_3(x)\\
&p_2(x) = q_3(x)p_3(x) - p_4(x)\\
&\vdots\\
&p_{r-1}(x) = q_r(x)p_r(x)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

tales que $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\ldots$, $p_r(x)$ satisfacen la condición del algoritmo de la división: $\deg p_{n+1}(x) < \deg p_n(x)$.

Para todo número real a que no es raíz de $p(x)$ sea $w(a)$ el número de cambios de signo en la sucesión

$$p(a),\ p_1(a),\ \ldots,\ p_r(a)$$

en donde todos los ceros son omitidos. Si b y c son números cualesquiera ($b < c$) para los cuales $p(x)$ no se anula, entonces el número de raíces distintas en el intervalo $b \leq x \leq c$ (raíces múltiples contadas solamente una vez) es igual a

$$w(b) - w(c).$$

Demostración. Claramente, el último polinomio $p_r(x)$ es el máximo común divisor de $p(x)$ y $'p(x)$. Si dividimos todos los polinomios por $p_r(x)$, hemos retirado los factores lineales múltlipes de $p(x)$ sin afectar número de cambios de signo en cualquier punto a que no sea raíz de $p_r(x)$; en la división todos los signos de los términos de la sucesión han permanecido inalterados, o bien, todos han sido revertidos. Por lo tanto, en la prueba, asumimos que la división ha sido realizada; entonces el último término de la sucesión es una constante distinta de cero. En general, el segundo término de la sucesión no será la derivada del primero. De hecho, si d, digamos, es una raíz de $p(x)$ con multiplicidad l, tenemos que

$$p(x) = (x-d)^l g(x), \quad g(d) \neq 0, \tag{3.2}$$

$$p_1(x) = p'(x) = l(x-d)^{l-1}g(x) + (x-d)^l g'(x). \tag{3.3}$$

Ahora la división por $(x-d)^{l-1}$ lleva a dos polinomios de la forma

$$\overline{p(x)} = (x-d)g(x) \tag{3.4}$$

$$\overline{p_1(x)} = g(x) + (x-d)g'(x), \tag{3.5}$$

los cuales deberán ser divididos por los demás factores para las otras raíces $d', d'', d''' \ldots$. Denotamos estos polinomios modificados de nuevo por $p(x), \ldots, p_r(x)$.

En esta suposición, ningún par de términos sucesivos de la sucesión se anulan en algún punto a. Si para, digamos, $p_k(a)$ y $p_{k+1}(a)$ fueran ambos cero, podemos inferir a partir de (3.1) que $p_{k+2}(a), \ldots, p_r(a)$ también son cero, lo cuál es una contradicción pues $p_r(x)$ es una constante distinta de cero.

Las raíces de los polinomios de la sucesión dividen el intervalo $b \leq x \leq c$ en subintervalos. En un subintervalo, ni $p(x)$ ni ningún $p_k(x)$ se anulan, de donde se sigue por *Weierstrass' Nullstellensatz* que en el interior de tal intervalo todos los polinomios de la sucesión mantienen su signo, por lo que $w(a)$ se mantiene constante. Falta por examinar cómo el número $w(a)$ cambia en un punto d en donde un polinomio de la sucesión de anula.

Sea d la primera raíz de $p_k(x)\,(0 < k < r)$. De acuerdo a la ecuación

$$p_{k-1}(x) = q_k(x)p_k(x) - p_{k+1}(x) \tag{3.6}$$

los números $p_{k-1}(d)$ y $p_{k+1}(d)$ tienen signos opuestos. Por lo tanto, en los dos subintervalos adyacentes, $p_{k-1}(x)$ y $p_{k+1}(x)$ son de signos opuestos. El signo de $p_k(x)$ $(+, -,$o cero) no tiene influencia en el número de cambios de signos entre $p_{k-1}(x)$ y $p_{k+1}(x)$; siempre hay una variación de signo. Por lo tanto, el número $w(a)$ no cambia conforme pasa por d.

Ahora, sea d una raíz de $p(x)$ tal que, en concordancia con la observación realizada al principio, tenemos, digamos,

$$\overline{p(x)} = (x-d)g(x) \tag{3.7}$$

$$\overline{p_1(x)} = g(x) + (x-d)g'(x), \tag{3.8}$$

donde l es un entero. El signo de $p_1(x)$ en d, y por lo tanto en los dos subintervalos adyacentes, es el mismo que el de $g(d)$, mientras que el de $p(x)$ es igual al de $(x-d)g(d)$ en cada punto. Entonces, para $a < d$ tenemos un cambio de signo entre $p(a)$ y $p_1(a)$, pero para $a > d$ no tenemos ningún cambio. Cualesquiera otras variaciones del signo en la sucesión son preservadas al paso por d, como ya se mostró. Entonces el número $w(a)$ disminuye por 1 cuando a pasa por d. Esto completa la prueba del Teorema de Sturm. $\square$

Así, para contar el número de raíces reales de un polinomio $p(x)$ basta aplicar el *Teorema de Sturm* a $b = M$ y $c = -M$ con b y c como en el Teorema 3.2 y M como en el Teorema 3.1 . Así, si $w(M) - w(-M) = \deg p(x)$ tenemos que todas las raíces de $p(x)$ son reales.

3.2. Un polinomio desde el punto de vista del Algebra Lineal

Sea M una matriz cuadrada nxn

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & ... & m_{1n} \\ ... & ... & ... \\ m_{n1} & ... & m_{nn} \end{pmatrix}$$

$$I = (\delta_{ij}), \ (\delta_{ij} \text{ de Kronecker})$$

El polinomio característico de M es:

$$q(x) = \det (M - \lambda I)$$

El teorema de Cayley-Hamilton dice que

$$q(M) = 0$$

Este teorema nos permite, dada la matriz M, encontrar un polinomio que anula a M. El siguiente teorema nos permite encontrar, dado el polinomio $p(x)$, una matriz anulada por $p(x)$. Para un polinomio de grado n

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \tag{3.9}$$

con $a_i \in \mathbb{R}$, definimos

3.1 Definición. La *matriz compañera* de $p(x)$ es por definición la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

El siguiente teorema establece una relación entre el polinomio $p(x)$ y su matriz compañera.

3.3 Teorema. Si A es la matriz compañera del polinomio $p(x)$, entonces

$$p(A) = 0 \tag{3.11}$$

3.4 Lema. *El polinomio característico de A es tal que*

$$q(A) = 0 \tag{3.12}$$

Demostración (Teorema). El polinomio característico de A es por definición

$$q(x) = Det(A - xI) \tag{3.13}$$

con I la matriz identidad de $n \times n$. Ahora, con esta definición se tiene que

$$A - xI = \begin{pmatrix} -x - a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & -x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -x \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

de donde se obtiene que $q(x) = \pm p(x)$ y se sigue el resultado. □

Esto establece una relación entre los valores propios de la matriz A y las raíces del polinomio $p(x)$.

A define un operador T en R^n respecto de la base canónica de R^n. En las diferentes bases, T tiene distintas matrices. Definimos la relación

$$A \sim A'$$

si y solo si existe C no singular tal que

$$A' = C^{-1}AC$$

Esta relación es de equivalencia y en la clase de equivalencia de A existe una matriz diagonal si y solo si los vectores propios de A forman una base del especio.

Además se tiene que el signo del determinante de la matriz de la transformación es invariante de la base, pues se tiene que será

$$det\, A'^2 \tag{3.15}$$

Dentro de todas las bases del espacio, si escogemos la base nueva como un conjunto B' tal que tendremos que la matriz resultante A' será una matriz diagonal, llamaremos a esta base una *base can ónica de la matriz* A y a A' la *forma canónica* de la matriz A(Salvo reordenamientos). En particular, una base de *vectores propios* es una base canónica.

Para continuar con nuestro análisis introducimos unas definiciones

La matriz $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$es simétrica, si $\mathbf{a}_{ij}$= $\mathbf{a}_{ji}$. $\mathbf{A}$ es definida positiva, si todos sus valores propios son positivos. Si fijamos una base del espacio, existe una correspondencia biunívoca entre operadores lineales $\mathbf{T}$ y matrices $\mathbf{A}$ y escribimos $\mathbf{A} = [\mathbf{T}]$. Los valores propios de $\mathbf{T}$ y $[\mathbf{T}]$ son los mismos cualquiera que sea la base. Forma bilineal es una función real de dos variables vectoriales $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ que es lineal en cada variable. La forma bilineal es simétrica si satisface $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{B}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Si fijamos una base del espacio, a cada forma bilineal $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ corresponde una única matriz $[\mathbf{B}]$ y la forma $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es simétrica si y solo si la matriz $[\mathbf{B}]$ es simétrica. Forma cuadrática es por definición la función real $\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Existe una correspondencia biunívoca entre formas cuadráticas y formas bilineales simétricas y se dice que una está inducida por la otra. Una forma cuadrática es definida positiva si satisface que para todo $\mathbf{x}$: $\mathbf{K}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ solo si $x = 0$. Un producto escalar $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$es una forma bilineal simétrica que induce una forma cuadrática definida positiva. Teorema: en todo espacio vectorial en el que está definido un producto escalar $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, existe una correspondencia biunívoca entre formas bilineales y operadores lineales $\mathbf{T}$ de la manera siguiente: $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{T}\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Definición: el operador $\mathbf{T}$ es simé trico, si para todos los $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$: $(\mathbf{T}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{T}\mathbf{y})$. Teorema: la forma bilineal $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es simétrica si y solo si el operador $\mathbf{T}$ es simétrico. Si fijamos una base del espacio, esta correspondencia biunívoca se extiende también a las matrices: dada la base, tenemos $[\mathbf{B}] \longleftrightarrow \mathbf{B} \longleftrightarrow \mathbf{T} \longleftrightarrow [\mathbf{T}]$ y $[\mathbf{T}] = [\mathbf{B}]$. La forma bilineal $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{T}\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es simétrica si y solo si la matriz $\mathbf{A} = [\mathbf{T}] = [\mathbf{B}]$ es simétrica en alguna base (y por lo tanto, en todas), y esto último se cumple si y solo si el operador $\mathbf{T}$ es simétrico.

Lo cual da lugar al siguiente Teorema:

3.5 Teorema. La matriz $[\mathbf{T}]$ es definida positiva si y solo si la forma cuadrática $\mathbf{K}$ inducida es definida positiva.

Se tiene por tanto que una forma cuadrática definida positiva solamente tomará valores no negativos, pues su forma canónica estará formada únicamente por coeficientes positivos. Además, con las definiciones anteriores es importante remarcar que aunque la positividad de los valores propios pueda parecer dependiente de la elección de la base del espacio, se tiene que la base no afecta el signo de los valores propios de A. Esto se enuncia en el siguiente teorema

3.6 Teorema (Ley de Inercia)**.** El número de términos positivos y el número de términos negativos de la representación canónica de A son ivariantes de la forma, i.e., no dependen de la elección de la base.

Así, se tiene que no importa con que base se trabaje, los resultados en cuanto a determinar el signo de los valores propios serán los mismos.

Ahora se tiene el siguiente teorema

3.7 Teorema. Una condición necesaria y suficiente para que $A = \|a_{ij}\|$ sea definida positiva es que sus menores principales desendentes

$$a_{11}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots, Det\|a_{ij}\| \tag{3.16}$$

sean todos positivos.

Demostración. Si los menores principales de A son positivos, entonces todos los coeficientes canónicos de A en alguna base son todos positivos, i.e, A es definida positiva. A la inversa, supongamos que A es definida positiva, por lo que la forma bilinal (Au, v) es positiva. Queremos probar que entonces los menores principales de A son positivos. De hecho, el menor principal

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} \tag{3.17}$$

define la matriz $\|a_{ik}\| \quad (i, k = 1, 2, \ldots, m)$ de la forma bilineal (Au, v) en el subespacio L_m generado por los primeros m vectores de la base. Como (Au, v) es definida positiva en el subespacio L_m $[(Au, u), > 0 \,\text{para}\; u \neq 0]$, entonces en el subespacio L_m existe una base canónica en la cual (Au, v) puede ser escrita en forma canónica con coeficientes positivos. En particular, relativo a esta base, el determinante de (Au, v), que es igual al producto de los coeficientes canónicos, también es positivo. Teniendo en mente la relación entre determinantes en distintas bases (3.15), vemos que el determinante de (Au, v) relativo a la base original también es positivo. Pero el determinante de (Au, v) en la base original es el menor M. Por lo tanto, $M > 0$, y la prueba del teorema está completa. $\square$

Con el teorema anterior se tiene un resultado importante respecto del polinomio $p(x)$.

3.1 Corolario. Una condición necesaria y suficiente para que las raíces de $p(x)$ sean reales positivas es que los menores principales desendentes de su matriz compañera A, sean todos positivos.

3.1Ñota. Un hecho interesante es que último resultado es equivalente a la regla de los signos de *Descartes* y a las ecuaciones de *Vieta*, ya que se tiene que el determinante del menor principal de orden $n - m$ de A es $(-1)^{n-m}a_m$.

4. TRANSFORMACIONES DE $\mathfrak{R}_n$ EN SÍ MISMO

En este capítulo estudiaremos una clase de sucesiones de números reales positivos, a cada una de las cuales se asocia un mapeo de $\mathfrak{R}_n$ en sí mismo. Para ello, consideraremos a $\mathbb{R}^n$ desde dos puntos de vista:

En primer lugar, como imagen de $\mathfrak{R}_n$ bajo el mapeo

$$c : \mathfrak{R}_n \to \mathbb{R}^n \tag{4.1}$$

definido por

$$c : p(x) \mapsto (a_{n-1}, ..., a_0) \tag{4.2}$$

donde $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_n = 1$.

Por otra parte, consideraremos los mapeos

$$\Gamma : \mathfrak{R}_n \to \mathfrak{R}_n \tag{4.3}$$

definidos por $\Gamma = (\gamma_{n-1}, ..., \gamma_0) \in \mathbb{R}^n$ de la manera siguiente:

$$\Gamma(p(x)) = q(x) \tag{4.4}$$

donde

$$q\,(x) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k a_k x^k \tag{4.5}$$

con $\gamma_n = 1$.

El problema consiste en caracterizar las sucesiones de Pólya, que son por definición las sucesiones $\Gamma = (\gamma_{n-1}, ..., \gamma_0)$ que mapean $\mathfrak{R}_n$ en sí mismo.

4.1. Sucesiones en $\mathfrak{R}_2$ y $\mathfrak{R}_3$

En el caso de polinomios de primer grado no es necesario caracterizar un tipo de sucesiones, puesto que todos los polinomios de grado uno con coeficientes reales tienen su raíz real, así que el análisis comienza con los polinomios de segundo grado.

4.1.1. Polinomios de Segundo Grado

Vamos a considerar los elementos de $R \times R$ y a cada $\Gamma \in R \times R$ le asociaremos una operación que transforma trinomios cuadráticos mónicos en trinomios cuadráticos mónicos de la manera siguiente: dado $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ con γ_1 y γ_2 reales y dado un polinomio de segundo grado

$$p(x) = x^2 + ax + b \tag{4.6}$$

definimos

$$p_\Gamma(x) = x^2 + \gamma_1 ax + \gamma_2 b \tag{4.7}$$

Con esta definición podemos pasar a caracterizar las sucesiones Γ que transforman a $\mathbb{R}_2$ es sí mismo:

4.1 Teorema. Si $\Gamma \in R \times R$ es tal que

$$q\,(x) = x^2 + \gamma_1 \binom{2}{1} x + \gamma_2 \binom{2}{0} \tag{4.8}$$

tiene sus raíces reales, entonces para todo $p(x)$ con raíces reales, $p_\Gamma(x)$ tiene sus raíces reales.

Demostración. En efecto, el enunciado es equivalente a la afirmación de que se cumple la desigualdad

$$(\gamma_1 a)^2 \geq 4(\gamma_2 b). \tag{4.9}$$

por lo que $p(x)$ y $q\,(x)$ tienen sus raíces reales si y solo si se cumplen las dos desigualdades siguientes:

$$D = a^2 - 4b \geq 0, \tag{4.10}$$

$$\gamma_1^2 \geq \gamma_2. \tag{4.11}$$

De aquí se sigue (4.9) y la demostración está completa. □

4.1.2. Polinomios de Tercer grado

Ahora generalizaremos lo hecho en el apartado anterior. Si $\Gamma \in R \times R \times R$, asociaremos a $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ una operación que transforma polinomios cú bicos mónicos en polinomios cúbicos mónicos de la manera siguiente: dado

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c, \tag{4.12}$$

definimos

$$p_\Gamma(x) = x^3 + \gamma_1 ax^2 + \gamma_2 bx + \gamma_3 c. \tag{4.13}$$

Recordemos (Definición 2.3) que $\mathfrak{R}_3$ es el conjunto de polinomios cúbicos mónicos con todas sus raíces reales y que hemos identificado a $\mathfrak{R}_3$ con el subconjunto de R^3 cuyos elementos (a, b, c) definen a $p(x)$ como en (4.12) de tal manera que $p(x) \in \mathfrak{R}_3$. La frontera de $\mathfrak{R}_3$ como subconjunto de R^3está formada por las ternas (a, b, c) tales que $p(x)$ tiene al menos una raíz doble, por lo que los polinomios del tipo

$$(x + r)^2(x + s) = x^3 + (2r + s)x^2 + (r^2 + 2rs)x + (r^2 s) \tag{4.14}$$

conforman la frontera de $\mathfrak{R}_3$. Se sigue que $p(x)$ o (a, b, c) está en la frontera de $\mathfrak{R}_3$ si y solo si se cumplen las tres igualdades siguientes:

$$a = 2r + s,$$

$$b = r^2 + 2rs,$$

$$c = r^2 s.$$

Considérense

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= r \\
\gamma_2 &= r^2 \\
\gamma_3 &= r^3
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

con r real, entonces se tiene que

$$
\begin{aligned}
&x^3 + r(2a+b)x^2 + r^2(a^2+2ab)x + r^3(a^2b) \\
&= x^3 + (2(ar)+(br))x^2 + ((ar)^2 + 2(ar)(br))x + ((ar)^2(br)) \\
&= (x+ar)^2(x+br).
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

Este último polinomio tiene sus raíces reales y además está en la frontera de $\mathfrak{R}_3$.

Por lo tanto, multiplicar termino a termino los coeficientes de un elemento de la frontera por la sucesión γ da como resultado otro elemento de la frontera, por lo tanto esta operación transforma polinomios con raíces reales en otros del mismo tipo.

Ahora considérese la sucesión

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{1}{\binom{3}{2}}(2c+d) \\
\gamma_2 &= \frac{1}{\binom{3}{1}}(c^2+2cd) \\
\gamma_3 &= \frac{1}{\binom{3}{0}}(c^2d)
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

entonces, si se multiplica la sucesión γ con los coeficientes de un polinomio de la frontera como en (4.9), el polinomio resultante es

$$x^3 + \frac{1}{\binom{3}{2}}(2a+b)(2c+d)x^2 + \frac{1}{\binom{3}{1}}(a^2+2ab)(c^2+2cd)x + \frac{1}{\binom{3}{0}}(a^2b)(c^2d) \tag{4.18}$$

el cual, utilizando un sistema algabráico por computadora, se encuentra que tiene raíces

$$\begin{aligned} x_0 &= -ac \\ x_1 &= \frac{1}{6}(-ac-2bc-2ad-bd-\sqrt{(ac+2bc+2ad+bd)^2-36abcd}) \\ x_1 &= \frac{1}{6}(-ac-2bc-2ad-bd+\sqrt{(ac+2bc+2ad+bd)^2-36abcd}) \end{aligned} \tag{4.19}$$

por lo tanto, el polinomio en (4.13) tendrá sus raíces reales si y solo si

$$(ac+2bc+2ad+bd)^2 \geq 36abcd \tag{4.20}$$

lo cual es cierto si c y d son no negativos, ya que si se tiene un número impar de negativos entre a, b, c y d, (4.15) es inmediato. Si se tienen 0 o 4 negativos se tiene que por la desigualdad AM-GM

$$\frac{ac+bc+bc+ad+ad+bd}{6} \geq \sqrt[6]{a^3b^3c^3d^3} \tag{4.21}$$

de donde se sigue el resultado.

Para el caso en que 2 numeros son del mismo signo se tiene que las posibles combinaciones de signos se reducen a los casos

$$\begin{aligned}(ac + 2bc + 2ad + bd)^2 &\geq 36abcd \\ (ac - 2bc - 2ad - bd)^2 &\geq 36abcd\end{aligned} \tag{4.22}$$

el primero de los cuales ya está resuelto y se obtiene cuando a y b o c y d son negativos. El segundo de los casos no se cumple en general, puesto que si $a = b = c = d$, se tiene

$$4a^4 \geq 6a^4 \tag{4.23}$$

una contradicción.

Para una sucesión cualquiera $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ tal que

$$x^3 + \gamma_1 \binom{3}{2} x^2 + \gamma_2 \binom{3}{1} x + \gamma_3 \binom{3}{0} \tag{4.24}$$

tiene sus raíces reales se tiene que por (4.12) la multiplicación de (4.12) por los coeficientes de (4.19)

$$x^3 + \gamma_1(2c + d)x^2 + \gamma_2(c^2 + 2cd)x + \gamma_3(c^2 d) \tag{4.25}$$

tiene sus raíces reales. Además se tiene que (4.20) es la multiplicación de la sucesión γ con un elemento de la frontera de $\mathfrak{R}_3$, así que todo elemento de la frontera de $\mathfrak{R}_3$ se transforma en un polinomio con raíces reales, esto quiere decir que γ transforma $\mathfrak{R}_3$ en sí mismo.

4.2. Caracterización de las Sucesiones

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que si $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

$$f(a) \mapsto (s_1^n, s_2^n, \ldots s_n^n)$$

donde s_i^n es la iésima función simétrica elemental, las cuales están definidas por

$s_1^n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

$s_2^n = a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + \cdots + a_{n-1}a_n$

$s_3^n = a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_4 + \cdots + a_{n-2}a_{n-1}a_n$

$\vdots$

$s_n^n = a_1a_2a_3 \ldots a_n$

f es una función continua y como $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo y cerrado, $Im(f) = \mathfrak{R}_n$ es simplemente conexo y cerrado.

Sea $A_n = \{a \in \mathbb{R}^n / a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \wedge a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n\}$.

Entonces

$\partial A_n = \{a \in \mathbb{R}^n / a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \wedge a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_i = a_{i+1} \geq ... \geq a_n$ para algún $i\}$.

La restricción de f a A_n es continua e inyectiva. Además, $f(A_n) = \mathfrak{R}_n$, por lo que f^{-1} está definida y es continua. Se sigue que f, y por lo tanto f^{-1}, transforma cerrados en cerrados y mapea $\partial\mathfrak{R}_n$ en ∂A_n.

$$\partial\mathfrak{R}_n = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x]/p(x) = (x+c)^2 q(x), q(x) \in \mathfrak{R}_{n-2}\}$$

en otras palabras, $Int(\mathfrak{R}_n)$ está compuesto por todos los polinomios de grado n con sus n raíces reales distintas.

Asi que $\partial\mathfrak{R}_n$ se puede parametrizar como

$$(2c + s_1^{n-2}, c^2 + 2cs_1^{n-2} + s_2^{n-2}, c^2 s_1^{n-2} + 2cs_2^{n-2} + s_3^{n-2}, \ldots, c^2 s_{n-2}^{n-2}) \qquad (4.26)$$

Por lo tanto,

$$u_n = (\binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \ldots, \binom{n}{1}, \binom{n}{0}) \in \mathfrak{R}_n$$

Consideremos la sucesión

$$\alpha_k^n = r^{n-k}$$

y definamos la función $h_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ así:

$$h_\alpha(a) = (\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2, \ldots, \alpha_n a_n)$$

h_α es una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo.

Si $v \in \partial\mathfrak{R}_n$, entonces $h_\alpha(v) \in \partial\mathfrak{R}_n$, ya que $v \in \partial\mathfrak{R}_n$ implica que existen reales tales que

$$v = (2c + s_1^{n-2}, c^2 + 2cs_1^{n-2} + s_2^{n-2}, \ldots, c^2 s_{n-2}^{n-2})$$

en donde $c \in R$ y s_k^{n-2} son los coeficientes de un polinomio de grado $n-2$ con raíces reales. Por lo tanto

$$h_\alpha(v) = (2(rc) + (rs_1^{n-2}), (rc)^2 + 2(rc)(rs_1^{n-2}) + (r^2 s_2^{n-2}), \dots, (rc)^2(r^{n-2}s_{n-2}^{n-2}))$$

y se tiene que por (2.1) que $h_\alpha(v) \in \mathfrak{R}_n$, ya que se tiene como parámetros rc y el polinomio con raíces $rx_1, rx_2, \dots, rx_{n-2}$. Por lo tanto, como h_α es una transformación lineal, $h_\alpha(\partial \mathfrak{R}_n) = \partial h_\alpha(\mathfrak{R}_n) = \partial \mathfrak{R}_n$, así que $h_\alpha(\mathfrak{R}_n) = \mathfrak{R}_n$ y por lo tanto $h_\alpha(v)$ transforma un polinomio con raíces reales en otro con raíces reales.

Ahora se enuncia un resultado propuesto por Pólya

4.2 Teorema. Si (γ_k) es una sucesión de reales positivos tal que

$$x^n + \gamma_{n-1}\binom{n}{n-1}x^{n-1} + \gamma_{n-2}\binom{n}{n-2}x^{n-2} + \cdots + \gamma_1\binom{n}{1}x + \gamma_0 \tag{4.27}$$

tiene todas sus raíces reales, entonces para todo polinomio mónico

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{4.28}$$

con todas sus raíces reales, el polinomio

$$p_\gamma(x) = x^n + \gamma_{n-1}a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \gamma_2a_2x^2 + \gamma_1a_1x + \gamma_0a_0 \tag{4.29}$$

tendrá todas sus raíces reales.

4.3. Algunas sucesiones particulares

Ya se vio una forma de caracterizar las sucesiones que tienen la propiedad de trasformar un polinomio con coeficientes y raíces reales en otro del mismo tipo. Ahora se verán algunas sucesiones particulares que cumplen con esto.

Progresiones Geométricas

Como se vió en la sección anterior, si se tiene una sucesión dada por

$$\gamma_k = r^k \tag{4.30}$$

para r un real positivo, transforma a u_n en otro elemento de $\mathfrak{R}_n$, por lo que este tipo de sucesiones es de la clase que interesa.

Sucesiones de Coeficientes Binomiales

Para este ejemplo se comenzará con el siguiente Lema

4.3 Lema. *Sea*

$$p_{n,m}(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{n}{m-k} x^k \tag{4.31}$$

con $n > m$, entonces se tiene que $p_{n,m}(x)$ tiene todas sus raíces reales.

Demostración. Sea $q(t) = t^m(1-t)^m$. Entonces se tiene que todas las raíces de $q(t)$ son reales, y por lo tanto las raíces de $q^{(n)}(t)$ son reales, 0 y 1 son de multiplicidad $m-n$ y n raíces dentro de $(0,1)$, digamos $0 < t_1, t_2, \ldots, t_n < 1$. Entonces se tiene que

$$
\begin{aligned}
q^{(n)}(t) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{m!}{(m-n)!} t^{m-k} \frac{m!}{(m-n+k)!} (-1)^{n-k} (1-t)^{m-n+k} \\
&= (-1)^n t^m (1-t)^{m-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!m!m!}{k!(n-k)!(m-k)!(m-n+k)!} \frac{(t-1)^k}{t^k} \\
&= (-1)^n t^m (1-t)^{m-n} n! \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} \binom{m}{n-k} \frac{(t-1)^k}{t^k} \\
&= (-1)^n t^m (1-t)^{m-n} n! p_{n,m} \left(\frac{t-1}{t} \right)
\end{aligned}
$$

por lo que $p_{n,m}(x)$ tiene n raíces reales negativas

$$
x_i = \frac{t_i - 1}{t_i}
$$

□

Así que, sea

$$
\alpha_k^n = \binom{n}{k} \tag{4.32}
$$

con $k \leq n$, y

$$
\beta_k^{n,m} = \binom{n}{m-k} \tag{4.33}
$$

con $n \geq m$ y $k \leq m$, y para $m < k \leq n$

$$
\beta_k^{n,m} = 0 \tag{4.34}
$$

por lo tanto, por el Lema 4.3 se tiene que α^n y $\beta^{n,m}$ son sucesiones de reales positivos que cumplen con la propiedad.

4.4. Propiedades Generales de las Sucesiones

4.4.1. Signo de los términos de la sucesión

Si se tiene una sucesión (γ_n) tal que transforma polinomios con raíces reales en otro con raíces reales, entonces se tendrá que transformará en un polinomio con raíces reales a

$$x^k - x^{k-2}, \quad k > 2 \tag{4.35}$$

así que se tendrá que

$$\gamma_k x^k - \gamma_{k-2} x^{k-2} \tag{4.36}$$

tiene raíces reales, por lo que γ_k y γ_{k-2} tienen el mismo signo, asi que se tiene que todos los coeficientes pares tendrán el mismo signo, así como los coeficientes impares.

4.4.2. Varianza de las Raíces

Si se tiene un polinomio como en (4.2) con raíces $r_1, r_2, \ldots, r_n$,

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i<j} (r_j - r_i)^2}{\binom{n}{2}} \tag{4.37}$$

es la varianza de las distancias entre las raíces.

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\delta^2 &= \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{i<j} (r_j - r_i)^2 = \frac{1}{\binom{n}{2}} \left((n-1) \sum_{i=1}^{n} r_i^2 - 2 \sum_{i<j} r_i r_j \right) \\
&= \frac{1}{\binom{n}{2}} \left((n-1) \left(\left(\sum_{i=1}^{n} r_i \right)^2 - 2 \sum_{i<j} r_i r_j \right) - 2 \sum_{i<j} r_i r_j \right) \\
&= \frac{1}{\binom{n}{2}} \left((n-1) \left(\sum_{i=1}^{n} r_i \right)^2 - 2n \sum_{i<j} r_i r_j \right) \\
&= \frac{1}{\binom{n}{2}} ((n-1) a_{n-1}^2 - 2n a_{n-2})
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

de esto se tiene el siguiente teorema

4.4 Teorema. Si $p(x)$ tiene raíces reales, entonces estas son iguales si y solo si

$$
\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \tag{4.39}
$$

Por lo tanto se tiene que

$$
\delta^2 = \frac{1}{\binom{n}{2}} ((n-1) a_{n-1}^2 - 2n a_{n-2}) \tag{4.40}
$$

y si se le aplica una sucesión de progresiones geométricas o binomiales, se tiene que la nueva separación promedio será

$$
\delta_\gamma^2 = \frac{1}{\binom{n}{2}} ((n-1) r^{2(n-1)} a_{n-1}^2 - 2n r^{n-2} a_{n-2}) \tag{4.41}
$$

$$
\delta_\alpha^2 = \frac{1}{\binom{n}{2}} ((n-1) {\alpha_{n-1}^n}^2 a_{n-1}^2 - 2n \alpha_{n-2}^n a_{n-2}) \tag{4.42}
$$

y

$$
\delta_{\beta_m}^2 = \frac{1}{\binom{m}{2}} \left((n-1) \left(\frac{\beta_{m-1}^{n,m}}{\beta_m^{n,m}} \right)^2 a_{m-1}^2 - 2n \frac{\beta_{m-2}^{n,m}}{\beta_m^{n,m}} a_{m-2} \right) \tag{4.43}
$$

5. APLICACIONES

5.1. Circuitos LRC

En un circuito LRC en serie la segunda ley de Kirchhoff establece que la suma de las cadas de tensin a travs de un inductor, una resistencia y un capacitor es igual a la tensin aplicada. De la teoría de circuitos se tiene que:

La cada de tensin a travs de un inductor es igual a

$$L\frac{di}{dt} \tag{5.1}$$

La cada de tensin a travs de la resistencia es

$$Ri \tag{5.2}$$

La cada de tensin a travs de un capacitor es

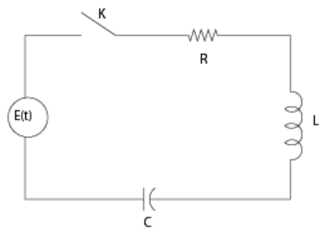
$$\frac{1}{C}\int_0^t idt \tag{5.3}$$

donde L, R, C e i son la inductacia, resistencia, capacitancia y corriente del circuito respectivamente.

Sea $E(t)$ la fuente de voltaje que alimenta el circuito, entonces podemos modelar la corriente por medio de la ecuación

$$E(t) = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t idt \tag{5.4}$$

Figura 7: Circuito LRC



la cual puede expresarse de la forma

$$\frac{d}{dt}E(t) = L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i \tag{5.5}$$

ahora, para que el circuito no tenga una respuesta oscilante en el régimen permanente, debe tenerse que las raíces de la ecuación característica

$$Ls^2 + Rs + \frac{1}{C} = 0 \tag{5.6}$$

sean reales.

Por la sección 4.3, si se tiene un circuito estable en régimen permanente, puede entonces duplicarse el valor de la resistencia y permanecerá estable, así mismo, puede cambiarse la resistencia R por Rk y el capacitor C por $\frac{C}{k^2}$ que la respuesta seguirá siendo estable.

Si se expresa la ecuación (5.6) como

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \tag{5.7}$$

se tienen condiciones más generales:

- Pueden remplazarse R y/o L de tal forma que la razón entre las R y L nuevas sea dos veces la de las anteriores

- Pueden remplazarse R y/o L y/o C de tal forma que la razón entre las R y L nuevas sea k veces la de las anteriores y que el producto LC de los valores nuevos sea k^2 veces más pequeño que el de los anteriores.

Por el Teorema (4.2) podemos enunciar el siguiente resultado

5.1 Teorema. Si se tiene un circuito LRC cuya ecuación característica es como (5.7) y se tiene que posee respuesta estable en el régimen permantente entonces, si los números positivos m, n cumplen con

$$\frac{n^2}{m} \geq 4\frac{L}{R^2C}$$

pueden cambiarse los valores de resistencia, capacitancia e inductacia por valores nuevos$R', L'C'$, manteniendo la respuesta estable si los valores nuevos cumplen con que

$$n\frac{R}{L} = \frac{R'}{L'}$$
$$\frac{m}{LC} = \frac{1}{L'C'}$$

5.2. Funciones de Transferencia

Una función de transferencia de un sistema en general puede interpretarse como la razón entre la salida del sistema y la entrada. En *Sistemas de Control* suele definirse una función de transferencia como la razón entre las transformadas de Laplace de las señales de salida y entrada del sistema. Esto se define así para poder analizar el comportamiento del sistema no solo en el dominio del tiempo sino que también en el dominio de la frecuencia.

En la mayoría de sistemas de control se obtienen funciones de trasferencia $H(s)$ de la forma

$$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_0}{s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \cdots + a_0} \tag{5.8}$$

en donde las funciones $b(s)$ y $a(s)$ son polinomios en s, la frecuencia. Generalmente la frecuencia se escribe como $s = j\omega$, donde ω es la frecuencia angular, es decir $\omega = 2\pi f$ con f la frecuencia real del sistema medida en Hz. Dependiendo la forma de dichos polinomios se puede describir el comportamiento del sistema respecto de la frecuencia.

Por medio de esta modelación, se puede también describir el comportamiento del sistema en términos del tiempo, realizando la transformada inversa de Laplace de la salida. Así, si la función de trasferencia tiene *polos reales*, entonces al pasar al dominio del tiempo, se tiene que la señal de salida no presenta oscilaciones y es estable.

Además, si se tiene que $a(s)$ tiene todas sus raíces reales, eso quiere decir que la función de trasferencia *será siempre finita*, es decir, siempre tendrá ganacia finita y no tendrá una frecuencia de resonancia, diciendo así que el sistema no provocará ningún tipo de sobre corriente o sobre voltaje.

Con el análisis realizado en el presente trabajo se puede llegar a enunciar el siguiente resultado

5.2 Teorema. Si se tiene una función de transferencia $H(s)$ como en (5.8) de tal manera que en el dominio del tiempo presente una salida estable no oscilatoria, entonces, si se modifica el sistema y se obtiene una función de transferencia $H'(s)$,

$$H'(s) = \frac{s^n + b'_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b'_0}{s^n + \gamma_{m-1}a_{m-1}s^{m-1} + \gamma_{m-2}a_{m-2}s^{m-2} + \cdots + \gamma_0 a_0} \tag{5.9}$$

el nuevo sistema será no oscilatorio o estable en el tiempo si y solo si la sucesión (γ_k) es una sucesión de como las estudiadas en el Capítulo 4.

CONCLUSIONES

1. Por medio de una transformación trilineal en el plano complejo, puede transformarse cualquier cónica en una recta, en particular en la recta real.

2. El estudio de los polinomios con todas sus raíces sobre una cónica puede realizarse de forma equivalente mediante el análisis de los polinomios con raíces reales, ya que existen transformaciones puntuales del plano complejo en sí mismo que transforman a un polinomio con raíces sobre una cónica cualquiera en uno con todas sus raíces reales.

3. Las traslaciones horizontales, homotecias, inversión y derivación, son operaciones que transforman a un polinomio con raíces reales en otro polinomio con raíces reales.

4. Al analizar los polinomios mediante su matriz compañera, se obtiene que la regla de los *signos de Descartes* y las *ecuaciones de Vieta* son equivalentes a la *Ley de Inercia*, los cuales son resultados utilizados para afirmar que un polinomio tiene todas sus raíces reales positivas.

5. Existen transformaciones lineales del espacio de polinomios en sí mismo, que tansforman cualquier polinomio con todas sus raíces reales en otro polinomio con todas sus raíces reales.

6. A cada polinomio con coeficientes reales se le puede asignar un punto en el espacio, cuyas coordenadas quedan determinadas por los coeficientes de dicho polinomio. Definida así esta correspondencia, el conjunto de polinomios de raíces reales forma una región simplemente conexa y cerrada en el espacio.

7. El análisis de la naturaleza de las raíces de un polinomio, tiene relación directa con la estabilidad de una señal de salida en los sistemas de control, tales como circuitos electricos, amplificadores, filtros, sistemas mecánicos, entre otros.

RECOMENDACIONES

1. Para evaluar de manera más sencilla si un polinomio de grado menor o igual a tres tiene todas sus raíces reales, se pueden utilizar los resultados obtenidos en el capítulo dos, especialente las secciones 2.3 y 2.4 .

2. Para mostrar de manera más formal, la caracterización de las sucesiones que transforman polinomios de raíces reales en polinomio de raíces reales dada por Pólya, se puede utilizar la noción de la región generada por dichos polinomios en el espacio, y probar que la región transformada permanece dentro de la región original, luego de haber aplicado un cambio de escala en cada uno de los ejes, debido a las sucesiones de números reales.

BIBLIOGRAFÍA

1. Distefano, Joseph J. **Teoría y Problemas de Retroalimentación y Sistemas de Control.** Estados Unidos: McGraw-Hill, 1967.

2. Kreiszig, Erwin. **Introductory functional analysis with applications.** Estados Unidos: John Wiley & Sons, 1978.

3. Rudin, Walter. **Principles of Mathematical Analysis.** Estados Unidos: McGraw-Hill, 1964.

4. Shilov, Georgi E. **An Introduction to the Theory of Linear Spaces.** Estados Unidos: Prentice-Hall, 1961.

5. Waerden, Nan Der. **Modern Algebra Volume I, II.** Estados Unidos: Frederick Ungar, 1953.